5.1 微分中值定理

2023年11月9日 星期四　14:05

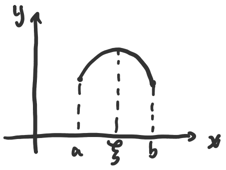
Rolle (罗尔) 定理　设函数 f 满足以下三个条件

(1) f 在 $[a,b]$ 上连续

(2) f 在 (a,b) 上可导

(3) $f(a)=f(b)$

只要求在(a,b)上可导



则 $\exists\, \xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi)=0$

证：由 f 在 $[a,b]$ 上连续，可知它可以在 $[a,b]$ 上取到最大值 M 与最小值 m

(1) 若 $M=m$，则 f 是 $[a,b]$ 上的常值函数，此时 $\forall\, \xi \in (a,b)$，均有 $f'(\xi)=0$

(2) 若 $M\neq m$，由 $f(a)=f(b)$，最大值 M 与最小值至少有一个在 (a,b) 中的一点 ξ 取到，从而 ξ 为 f 的极值点，又 f 在 (a,b) 内可导，由费马定理，$f'(\xi)=0$

缺 反例：① ② ③

※ 罗尔定理三个条件缺一不可

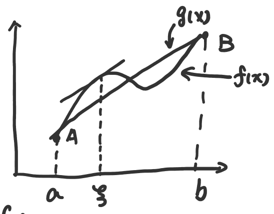
⇑ 特殊形式

拉格朗日 (Lagrange) 中值定理

设函数 f 满足以下三个条件

(1) f 在 $[a,b]$ 上连续

(2) f 在 (a,b) 上可导



则 $\exists\, \xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$　(i)

证：令 A 为点 $(a,f(a))$

B 为点 $(b,f(b))$

令 $g(x)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-a)+f(a)$，$x\in\mathbb{R}$

则 $g(a)=f(a)$，$g(b)=f(b)$，且 g 在 $\mathbb{R}$ 上可导

令 $F(x)=f(x)-g(x)$，$x\in[a,b]$

则 F 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，

并且 $F(a)=F(b)=0$

由罗尔定理，$\exists\, \xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$

即 $f'(\xi)=g'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

称 (i) 为拉格朗日公式

拉格朗日公式的其他形式：

(ii) $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，$a<\xi<b$

(iii) $f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))\cdot(b-a)$，$\theta\in(0,1)$

(iv) $f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)\cdot h$，$\theta\in(0,1)$

在 (i) 式与 (ii) 式中，既可以 $a<b$，也可以 $a>b$，此时要求 ξ 介于 a 与 b 之间

而对于 (iii) (iv) 两式，对 a 与 b 的大小关系没有限制，仅要求 $\theta\in(0,1)$

推论1：设函数 f 在区间 I 可导，且满足 $f'(x)=0$，$x\in I$.

则 f 是 I 上的常值函数.

证：只需证：任取 $x_1,x_2\in I$，都有 $f(x_1)=f(x_2)$

不妨设 $x_1<x_2$

由 f 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，在 (x_1,x_2) 上可导，应用 Lagrange

中值定理，$\exists\,\xi\in(x_1,x_2)$ 使 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0$

从而 $f(x_2)-f(x_1)=0 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$

推论2：设函数 f 与 g 都在区间 I 上可导，且满足 $f'(x)=g'(x)$，$x\in I$

则 $\exists\, C\in\mathbb{R}$，使 $f(x)=g(x)+C$，$x\in I$

推论3：（导数极限定理）

设函数 f 在点 x_0 的某邻域 $O(x_0,\delta_0)$ 内有定义，

若 f 在点 x_0 连续，在 $O^{\circ}(x_0,\delta_0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x_0)$ 存在

导数的极限

则 f 在点 x_0 可导，且 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$

只要证：$\underbrace{f'_+(x_0)}_{右导数}=\underbrace{f'_-(x_0)}_{左导数}=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$

为此，我们证明：

若 f 在点 x_0 右连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$ 存在，则 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$

注意到 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

由条件，f 在 $[x_0,x]$ 上连续，在 (x_0,x) 上可导

利用 Lagrange 中值定理，$\exists\,\xi_x\in(x_0,x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}f'(\xi_x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$

当 $x\to x_0^+$，$\xi_x\to x_0^+$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{1}=\lim_{x\to x_0}f'(x)$$

这步洛必达应用了

$f(x)$ 在 x_0 处连续这个条件

例1：

例 证明：对于 $\forall h>-1$，且 $h\neq 0$，有

$$\frac{h}{1+h}<\ln(1+h)<h \qquad (\triangle)$$

分析 令 $f(x)=\ln(1+x)$，$x>-1$

则 $\ln(1+h)=f(h)-f(0)$.

由 f 在 $(-1,+\infty)$ 上可导，对于 $\forall h>-1$ 且 $h\neq 0$.

在 $[0,h]$ 或 $[h,0]$ 上应用 L-中值定理，

$\exists\ 0<\theta<1$，s.t

$$f(h)-f(0)=f'(\theta h)\cdot h=\frac{h}{1+\theta h}$$

$\boxed{f'(x)=\frac{1}{1+x}}$

(1) 若 $h>0$，

$$1<1+\theta h<1+h$$

从而 $\dfrac{1}{1+h}<\dfrac{1}{1+\theta h}<1$

又由 $h>0$，可得 $\dfrac{h}{1+h}<\dfrac{h}{1+\theta h}<h$.

从而 $(\triangle)$ 式成立

(2) 若 $-1<h<0$，则

$$0<1+h<1+\theta h<1$$

$\Rightarrow$ $\dfrac{1}{1+h}>\dfrac{1}{1+\theta h}>1$

又由 $h<0$，可得 $\dfrac{h}{1+h}<\dfrac{h}{1+\theta h}<h$.

从而也有 $(\triangle)$ 式成立.

例2：函数 $P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, $n=0,1,2,\cdots$

☆ 被称为 n次勒让德多项式.

证明：$P_n(x)$ 在$(-1,1)$上恰有n个不同的根

$n=0$时显然成立 $P_0(x)=1$

下面设 $n\ge1$ $\quad \frac{d}{dx}(x^2-1)^n=2nx(x^2-1)^{n-1}$

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^n=2n(x^2-1)^{n-1}+4n(n-1)x^2(x^2-1)^{n-2}$$
$$=(x^2-1)^{n-2}[2n+4n(n-1)x^2]$$

从而 $\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^n=(x^2-1)^{n-m}P_{n,m}(x)$, $0\le m<n$ ☆

其中 $P_{n,m}(x)$是一个由n,m确定的多项式

记 $g_{n,m}=\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^n$, $0\le m\le n$

只需证 $g_{n,n}$ 在$(-1,1)$上恰有n个不同的根

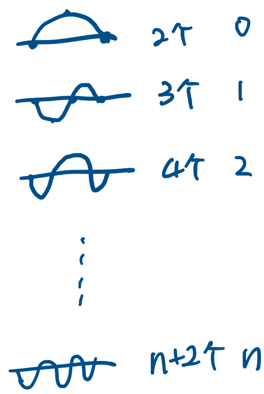
由(☆)式, $\forall\, 0\le m<n$, -1与1都是$g_{n,m}(x)$的根

从而 $-1, 1$ 都是 $g_{n,0}(x)$的根

由Rolle定理, $\exists\, x_{11}\in(-1,1)$, 使 x_{11}是$g_{n,1}(x)$的根

于是 $g_{n,1}(x)$在$[-1,1]$上至少有3个不同的根

⋮



$g_{n,n-1}$在$[-1,1]$上至少有$n+1$个不同的根

$g_{n,n}$ 在$(-1,1)$上至少有n个不同的实根 } 恰有n个实根

又 $g_{n,n}(x)$是一个n次多项式, 所以至多有n个实根.

~~f是严格单增的, $f'\neq0$~~

如：x^3

导函数与函数单调性的关系

定理：设函数f在区间I上可导，则(P1) $\forall x\in I$, 有 $f'(x)\ge0 \Leftrightarrow$ (P2) f在I上单增

(P3) f在I上严格单增 $\Leftrightarrow$ 下面两性质都成立

(P1) + (P4) f'在I的任一子区间上不恒等于0

※不是不能等于0, f'可为0

假设P3不成立, 则此时必存在 $x_1,x_2\in I$, 且 $x_1<x_2$, 使得 $f(x_1)=f(x_2)$

从而由f在I上单增可得f在$[x_1,x_2]$上为常值函数.

现f'在$[x_1,x_2]$上恒等于0, 矛盾!

推论：设函数f在区间I上可导, 且$\forall x\in I$, 有$f'(x)>0$

则f在I上严格单增.

注：假设f在(a,b)上(严格)单增, 且在a点右连续, 则f在$[a,b)$上(严格)单增

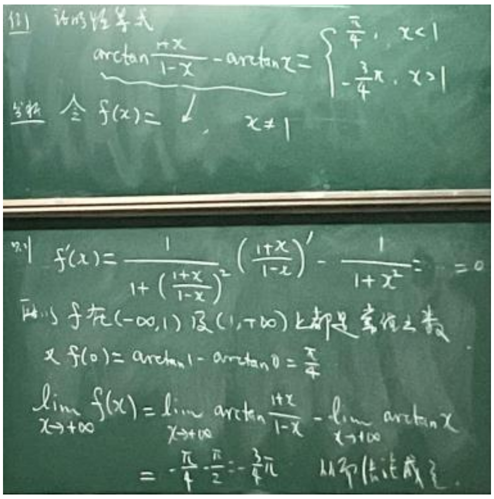
理由：任取 $x_2\in(a,b)$, 取定 $x_1\in(a,x_2)$

任取 $x\in(a,x_1)$ 有 $f(x)<f(x_1)$

从而由f在点a右连续

$f(a)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\le f(x_1)<f(x_2)$

证明恒等式：先说明 $f'=0$，再代值　很好的思路



函数的凸性（一定要注意凸性的定义）

定义：设f是定义在区间I上的函数

这才是原始定义　如果对于 $\forall x_1,x_2\in I$ 且 $x_1\neq x_2$，及任意的 $0<\lambda<1$ 有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\overset{(<)}{\le}\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

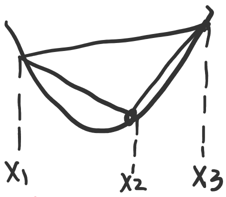
则称f是I上的下凸函数
（严格）

引理：设f是定义在区间I上的函数，则

f是区间I上的下凸函数 $\Longleftrightarrow$ $\forall x_1,x_2,x_3\in I$ 且 $x_1<x_2<x_3$

都有 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

（→左导）　　（←右导）



证：（$\Rightarrow$）任意取定 $x_1,x_2,x_3\in I$ 且 $x_1<x_2<x_3$，

令 $\lambda=\dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$，则 $x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_3$

$f(x_2)=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_3)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_3)$

$\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_2)$

从而　$\lambda(f(x_2)-f(x_1))\le(1-\lambda)(f(x_3)-f(x_2))$

$\Rightarrow\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

（$\Leftarrow$）任取 $x_1,x_2\in I$ 且 $x_1<x_3$

任取 $0<\lambda<1$，令 $x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_3$

然后由上述过程逆着推就行.

可变为 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\le\dfrac{f(x_2)-x_3)}{x_3-x_2}$

定理：设f是区间I上的可导函数，则以下断言等价：

1° f是区间I上的凸函数 →（严格）

2° f'是区间I上的单增函数 →（严格）

3° $\forall x_1, x_2 \in I$, 都有

$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$ → 理解为带L-余项的泰勒公式的变式·(展开到0阶)

3°→1°：任取 $x_1, x_2 \in I$ 及任意 $\lambda \in [0,1]$，都有

令 $x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_3$

则 $f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$

$f(x_3) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_3 - x_2)$

$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_3) \geq f(x_2) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_3)$

故1°成立.

1°→2° 任取 $x_1, x_2 \in I$ 且 $x_1 < x_2$

任取 $h \in (0, \frac{x_2 - x_1}{2})$

则 $x_1 < x_1 + h < x_2 - h < x_2$

由引理 $\frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_2 - h)}{h}$

进而 $h \to 0$ 时 $f'(x_1) < f'(x_2)$

2°→3° 若 $x_2 = x_1$ ✓

若 $x_2 > x_1$，由 Lagrange 中值定理. $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使

$f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1)$

$\geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$

若 $x_1 > x_2$ 亦成立

☆ 定理：设 f 是区间 I 上的二阶可导函数

(1) 则 f 是区间 I 上的凸函数 $\Longleftrightarrow f''(x) \geq 0, \forall x \in I$

(2) 若 $\forall x \in I$，若 $f''(x) > 0$，则 f 是区间 I 的严格凸函数

拐点

定义：设 $y = f(x)$ 在区间 I 上连续，$x_0 \in I$

(*) 若 f 在 x_0 的邻域 $O(x_0, \delta)$ 内有定义，且 f 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 及 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内具有相反的凸性.

则称 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.（是曲线上一点）而极值点是横坐标

和凸性相反

注：拐点只要求在拐点邻域上是连续的，注意连续不一定可导，也就不一定会有二阶导.

例：$x^{\frac{1}{3}}$

定理：设条件(*)成立，

若 f 在 $O^{\circ}(x_0, \delta)$ 内二阶可导，且 f'' 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 及 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内取相反的符号，则 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

这个是前提

定理：如果 x_0 是 f 的二阶可导点，且 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点，(**)

则 $f''(x_0) = 0$.

证：由，$\exists \delta_0 > 0$，使 f 在 $O(x_0, \delta_0)$ 内一阶可导，

由(**)，$\exists 0 < \delta < \delta_0$，$f$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 及 $(x_0, x_0 + \delta)$ 具有相反的凸性.

不妨设 f 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 上是凸的，在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 是上凸的.

从而 f' 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 上单增. 又 f' 在 x_0 点连续

则 f'在 $(x_0-\delta, x_0]$ 上单增，类似的f'在 $[x_0, x_0+\delta)$ 上单减.

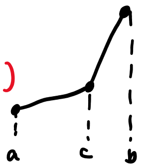
又f'在 x_0处可导，故由费马定理 $f''(x_0)=0$

※ $(x_0, f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$ 的拐点 $\not\Rightarrow$ $y=f(x)$在点 x_0处可导 $\left(\begin{array}{l}例: x^{\frac{1}{3}} \\ x_0=0\end{array}\right)$

f在开区间 (a,b)上是凸函数

这个结论用它来理解

☆ $\Rightarrow$ $\forall x\in(a,b)$，f在点x的左、右导数都存在（不一定是可导的）



c处不可导

$\Rightarrow$ f在(a,b)上是连续的 ↙ 既是左连续，又是右连续

柯西中值定理 设函数 f与g 满足如下条件：

(1) f与g 都在 $[a,b]$上连续

(2) f与g 都在 (a,b)内可导

$\Rightarrow$ 三个中值定理都有

(3) f'与g'在 (a,b)内不同时为0

则 $\exists \xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ (*) [理解为参数形式的拉格朗日中值定理]

※注：令 $g(x)=x$，可得 Lagrange 中值定理.

分析：

$\begin{cases} x=g(t) \\ y=g(t) \end{cases}$，$t\in[a,b]$

令 $h(t)= f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(t)-g(a))$，$t\in[a,b]$

则 $h(a)=f(a)$，$h(b)=f(b)$

令 $F(t)=f(t)-h(t)$.

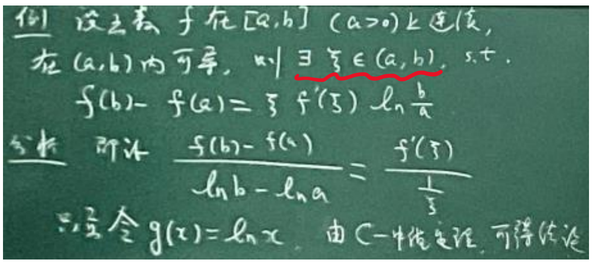
则F在$[a,b]$上连续，(a,b)上可导.

且 $F(a)=F(b)=0$

由罗尔定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$

即 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)$

由条件(3)知 $g'(\xi)\neq0$，所以可得*式成立


例 设函数 f在$[a,b]$ $(a>0)$上连续，在(a,b)内可导，则 $\exists\xi\in(a,b)$, s.t.

$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$

分析 所证 $\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\dfrac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$

只需令 $g(x)=\ln x$，由C-中值定理，可得结论

5.2 洛必达法则

2023年11月16日 星期四 13:48

(L'Hospital)法则，设函数f与g都在点a的某去心邻域 $(a, a+\delta_0)$ 内可导，并且满足以下条件：

可换为 $x\to+\infty$, $-\infty$, ∞, a, a^-

(1) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$ 或 $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \infty$

(2) $\forall x \in (a, a+\delta_0)$ 有 $g'(x) \neq 0$

(3) $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ （A可以是有限实数，也可以是 $+\infty, -\infty$ 或 ∞）

则 $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ （*）

※ ① f、g在a的邻域上可导 → （主要是要用柯西中值定理）

② 满足 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$

③ $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'}{g'}$ 存在 ☆

证：情形1 针对 $\frac{0}{0}$ 型

定义 $f(a)=0$ $g(a)=0$ （※ $g\neq 0$，若 $g=0$ 则存在 $g'=0$ 的点）

则 $\forall x \in (a, a+\delta_0)$，f与g在 $[a, x]$ 上满足Cauchy中值定理的条件

于是 $\exists \xi_x \in (a, b)$, s.t

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

令 $x\to a^+$ 必有 $\xi_x \to a^+$，从而（*）式成立

情形2（针对 $\frac{\infty}{\infty}$ 型）

任给 $x, y \in (a, a+\delta_0)$ 且 $x\neq y$，$\exists \xi$，使

（ξ 介于 x, y 之间 → 在 $[x,y]$ 连续，在 (x,y) 可导）

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

即 $$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(y)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)$$

设当 $x\to a^+$，取 $y\to a^+$，且

$\frac{f(y)}{g(x)} \to 0$ 且 $\frac{g(y)}{g(x)} \to 0$

就有（*）式成立

下面设A为有限实数

$\forall 0<\varepsilon<1$，由条件(3)，$\exists\, 0<p<\delta_0$，使当 $x\in(a,a+p)$ 时，

有 $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\varepsilon$.

任意固定 $y\in(a,a+p)$ （例如取 $y=a+\frac{p}{2}$）

由条件 $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=\infty$，$\exists\, 0<\delta<p$，使

当 $x\in(a,a+\delta)$ 时，有 $\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|<\varepsilon$，$\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|<\varepsilon$

则当 $x\in(a,a+\delta)$ 时，有

$\frac{f(x)}{g(x)}<\varepsilon+(A+\varepsilon)(1+\varepsilon)=A+\varepsilon(2+A+\varepsilon)$

$\frac{f(x)}{g(x)}>-\varepsilon+(A-\varepsilon)(1-\varepsilon)>A-\varepsilon(2+A)$

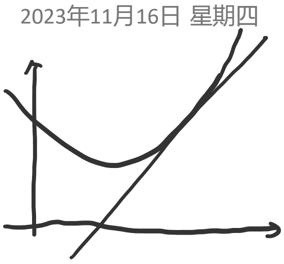
$\Rightarrow\ \left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|<\varepsilon(2+A+\varepsilon)<\varepsilon(3+A)$ （由 ε 的任意性，结论成立）

注：① 条件(1)不可缺少

例 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1-\cos x}=2$

5.3 泰勒(Taylor)定理

2023年11月16日 星期四 15:15



设 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导，则在点 x_0 附近

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

问：若 $y=f(x)$ 在点 x_0 n 阶可导，能否找到一个 n 次多项式 $P_n(x)$，使 $f(x)\approx P_n(x)+o((x-x_n)^n)$

另一个角度 $f^{(k)}(x_0)=P_n^{(k)}(x_0)$ (3)

设 $f_n(x)=C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)^2+\cdots+C_n(x-x_0)^n$

则 $P_n^{(k)}(x_0)=C_k\cdot k!$

若(3)成立，则 $C_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

令 $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ (4)

则称 $T_n(x)$ 为 f 在点 x_0 处的 n 次泰勒多项式

定理：假设函数 f 在点 x_0 处 n 阶可导，$T_n(x)$ 为 (4) 的泰勒多项式，则

$$f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0$$

(即证：$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$)

一定要注意洛必达使用的条件

故存在这样的邻域

令 $P_n(x)=f(x)-T_n(x)$

$Q_n(x)=(x-x_0)^n$

f的n-1导的导数

由 f 在点 x_0 处 n 阶可导，可知 $\exists\delta>0$，使 f 在 $O(x_0,\delta)$ 内 $n-1$ 阶可导

注意到 $T_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)$，$0\le k\le n$

所以 $P_n^{(k)}(x_0)=0$ $\quad 0\le k\le n$

又 $Q_n^{(k)}(x_0)=n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot(x-x_0)^{n-k}$，$0\le k\le n$

所以 $Q_n^{(k)}(x_0)=0$，$0\le k\le n-1$

$Q_n^{(n)}(x_0)=n!\quad Q_n^{(n-1)}(x)=n!(x-x_0)$

从而 $\lim_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\overset{洛必达}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{P_n'(x)}{Q_n'(x)}\cdots\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{P_n^{(n-1)}(x)}{Q_n^{(n-1)}(x)}=\times$

不能继续了 没有说 $P_n(x)$ 在 $O(x_0,\delta)$ 上 n 阶可导

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{P_n^{(n-1)}(x) - P_n^{(n-1)}(x_0)}{n!\,(x-x_0)} = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0$$

$=0$

上述定理称作，带 Peano 余项的泰勒公式

称 $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ 为泰勒公式的余项

当 $x_0=0$ 时，f 在点 0 处的泰勒多项式 称作为麦克劳林多项式

注①若 $P_n(x)$ 是一个 n 次多项式，且满足（f 在 x_0 附近有定义）

$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$，$x \to x_0$

问：$P_n(x)$ 是否一定是 f 在 x_0 处的 n 阶泰勒多项式？

不一定，f 在 x_0 处可能不存在 n 次泰勒多项式

例：$f(x) = x^{n+1} D(x)$ → 狄利克雷函数

令 $P_n(x) = 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \cdots + 0x^n$

此时 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-P_n(x)}{x^n} = 0$

f 仅在 0 处可导

⇒ 当 $m \geq 2$ 时 $f^{(m)}(0)$ 不存在（$f''(0)$ 存在要求 $f'(x)$ 在 0 处的邻域上可导）

由于 $n \geq 2$，所以 f 在点 0 处的 n 次泰勒多项式不存在

注②：设 $P_n(x)$ 和 $g_n(x)$ 都是 n 次多项式，且满足

$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$，$x \to x_0$ (1)

$f(x) = g_n(x) + o((x-x_0)^n)$，$x \to x_0$

则一定有 $P_n(x) = g_n(x)$

注③：由注2，当函数 f 在点 x_0 存在 n 阶导数时，满足(1)式的 n 次多项式，$P_n(x)$ 必等于泰勒多项式

这称为泰勒多项式的唯一性

带 Lagrange 型余项的泰勒公式（理解为一个区间内的泰勒公式+误差估计）

设函数 f 在 $[a,b]$ 上具有连续的 n 阶导数，

在 (a,b) 上 $(n+1)$ 阶可导，取定 $x_0 \in [a,b]$

则对于任意的 $x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$，∃介于 x_0 与 x 之间的

一点 ξ，使得

$$f(x)=T_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \rightarrow \frac{f(x)-T_n(x)}{-(x-x_0)^{n+1}}=-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

柯西中值.

取定 x_0, $x\in[a,b]$ 且 $x\neq x_0$ (不妨设 $x>x_0$)

注意!此时没有极限要求

令 $F(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$, $t\in[x_0,x]$

$G(t)=(x-t)^{n+1}$

则 $F(x_0)=T_n(x)$, $F(x)=f(x)$

$G(x_0)=(x-x_0)^{n+1}$, $G(x)=0$ } 利用这两个函数是自然的 我要求!

又 F 与 G 在 $[x_0,x]$ 上连续,并都在 (x_0,x) 上可导,且 $G'(t)\neq 0$,

$\forall t\in(x_0,x)$

注意到 $G'(t)=-(n+1)(x-t)^n$

$$F'(t)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k+\frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1}(-1)\right]+f'(t)$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

由 Cauchy 中值定理

$$\frac{f(x)-T_n(x)}{-(x-x_0)^{n+1}}=\frac{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{-(n+1)(x-\xi)^n}\Rightarrow f(x)-T_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

若 $G(x)=x-x_0$ 则可得出 $f(x)=T_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(x-\xi)^n$

※ 若 $x_0=0$ 时,泰勒多项式被称为麦克劳林多项式

泰勒余项 被称为麦克劳林余项

5.4.1 泰勒公式的应用

2023年11月23日 星期四　　13:54

一、在求极限中的应用

例：求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)$$

$$\text{故原式}=\frac{\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}$$

☆ 例：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2x)-6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)}{x^4}$

$$\sqrt[3]{2-\cos x}=(1+(1-\cos x))^{\frac{1}{3}}$$

$$=1+\binom{\frac{1}{3}}{1}(1-\cos x)+\binom{\frac{1}{3}}{2}(1-\cos x)^2+o((1-\cos x)^3)$$

$$=1+\frac{1}{3}(1-\cos x)-\frac{1}{9}(1-\cos x)^2+o((1-\cos x)^3)$$

$$\overset{1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}}{\underset{x\to 0\text{时}}{=\!=}}1+\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)^2+o(x^4)$$

$$=1+\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)^2+o(x^4)$$

由 $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$

$$\ln(1+\sin^2x)=\sin^2x-\frac{\sin^4x}{2}+o(\sin^4x)$$

$$\overset{\sin x\sim x}{\underset{x\to 0}{=\!=}}\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)^2-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)^4+o(x^4)$$

$$=\left(x^2-\frac{2x^4}{3!}+o(x^4)\right)-\frac{1}{2}x^4+o(x^4).$$

二、在近似计算中的应用

例：(1) 计算 e 的值

(2) 证明 e 为无理数

(1) $e^x=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}+\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$

故 $e=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}+\dfrac{e^{\theta}}{(n+1)!}$　　$0<\theta<1$　　(*)

当 $n=9$ 时　$\dfrac{3}{10!}<10^{-6}$

$e\approx\sum\limits_{k=0}^{9}\dfrac{1}{k!}=2.718285$

(2) 由 (*)

☆ $n!\left[e-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}\right]=\dfrac{e^{\theta}}{n+1}$，其中 $0<\theta<1$　　(**)

假设 e 为有理数，记为 $\dfrac{p}{q}$，并且 p, q 互素

则当 $n\geq q$ 时，(**) 左边为整数

当 $n\geq 2$ 时　$0<$ 右边 <1　矛盾！

从而 e 为无理数

例：计算 $\ln 2\approx 0.693147$

法1：$f(x)=\ln(x+1)$，则 $f(1)=\ln 2$

$$f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot x^n+R_n(x)$$

$\ln 2\approx 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\cdots+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}=0.645$　× 太差了

法2：令 $g(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$　则 $g(\frac{1}{3})=\ln 2$

$\frac{1}{3}$ 与0更近

$$g(x)=\ln(x+1)-\ln(1-x)$$

$$=\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}-\frac{x^{2n}}{2n}\right]+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\frac{x^{2n}}{2n}\right)+R_{2n,g}(x)$$

$$=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)+R_{2n,g}(x)$$

故 $\ln 2=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7\right]=0.693134$

三、在证明不等式时的应用

设 $\alpha>1$，证明当 $x>-1$ 时，有 $(1+x)^\alpha\geq 1+\alpha x$ 且等式成立时当且仅当 $x=0$

法1：证：令 $f(x)=(1+x)^{\alpha}-1-\alpha x$

由 $f(0)=0$ 且 f 在 $(-1,+\infty)$ 上连续

$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha=\alpha((1+x)^{\alpha-1}-1)$

由 $\alpha-1>0$，当 $x\in(-1,0)$ $f'(x)<0$

$x\in(0,+\infty)$ $f'(x)>0$

又 f 在 0 处连续，则 f 在 $(-1,0]$ 上严格单减，$[0,+\infty)$ 上严格单增

因此，当 $x\in(-1,+\infty)\setminus\{0\}$ 时，有 $f(x)>f(0)=0$

从而，结论成立。

证法2：令 $g(x)=(1+x)^{\alpha}$

$$g(x)=g(0)+\frac{g'(0)}{1!}x+\frac{g''(\theta x)}{2!}x^2\quad(\theta\in(0,1))$$

$$=1+\alpha x+\frac{g''(\theta x)}{2!}x^2$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(1+\theta x)^{\alpha-2}\cdot x^2\geq 1+\alpha x$$

[注意 $1+\theta x>0$]

研究几阶导数之间的关系

例1 设 f 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且在 $[0,1]$ 上满足 $|f(x)|\leq A$，$|f''(x)|\leq B$

证明：$\forall x\in[0,1]$，有 $|f'(x)|\leq 2A+\frac{1}{2}B$.

$\forall c\in(0,1)$，考察 f 在点 c 处的带有 L-余项的泰勒公式

对 $x\in(0,1)$，有 $f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$

从而 $f(0)=f(c)+f'(c)\cdot(-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(-c)^2$ ①

$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2$ ②

② - ①

$$f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{f''(\xi_2)(1-c)^2}{2!}-\frac{f''(\xi_1)c^2}{2!}$$

故 $f'(c)\leq|f(1)-f(0)|+\left|\frac{f''(\xi_2)(1-c)^2}{2!}-\frac{f''(\xi_1)c^2}{2!}\right|$

$$\le 2A + B\left(\frac{(1-c)^2+c^2}{2!}\right)$$

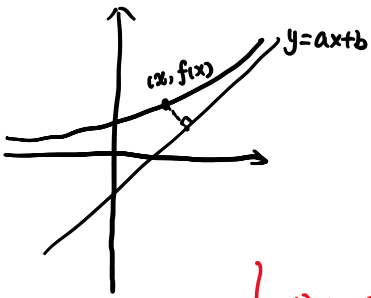
$$\le 2A + \frac{1}{2}B$$

由 c 的任意性结论成立.

斜 + 垂

$+\infty$ $-\infty$

Ⅳ. 求曲线的渐近性方程



给定曲线 $y=f(x)$

称直线 $y=ax+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的渐近线

(当 $a=0$ 时, 称其为水平渐近线)

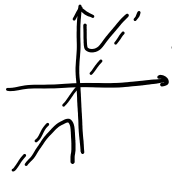
(当 $a\neq0$ 时, 称为斜渐近线)

· 若以下之一发生

(1) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

称为垂直渐近线) ← 求渐近线时两个都要考虑



如果以下之一发生:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}$ (曲线上的点到直线的距离) $=0$

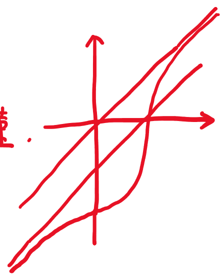
(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}$ (曲线上的点到直线的距离) $=0$

法1: $d=\dfrac{|ax-f(x)+b|}{\sqrt{a^2+1}} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ (3)

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ (4)

要严谨.

不一定相等



(3) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-(ax+b)}{x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ [(4)同理]

简单的式子直接用法1]

法2: (利用泰勒公式), 将复杂初等函数转为多项式来计算.

找实数 a, b 使

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}-(ax+b)\right)=0 \quad (*)$$

在(*)中, 令 $u=\frac{1}{x}$

$$0=\lim_{u\to0^+}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u}+1}-\left(\frac{a}{u}+b\right)\right)$$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{1}{u}\left(\sqrt[3]{1-u-u^2+u^3}-(a+bu)\right)$$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{1}{u}\left(1+\frac{1}{3}(u^3-u^2-u)+o(u^3-u^2-u)-(a+bu)\right)$$

$$= \lim_{u \to 0^+} \frac{1}{u}\left(1-\frac{1}{3}u-(a+bu)\right)$$

故 $a=1$，$b=-\frac{1}{3}$ 所求渐近线为 $y=x-\frac{1}{3}$

($-\infty$情况类似)

五. 函数的极值

费马定理：极值的必要条件

极值第一充分条件：设函数 f 在 $O(x_0,\delta)$ 内有定义，若 f 在点 x_0 连续，

且满足：(1) 当 $x\in(x_0,x_0+\delta_0)$ 时 $f'(x)\geq 0$ (2) 当 $x\in(x_0-\delta_0,x_0)$ 时 $f'(x)\leq 0$

则 x_0 是 f 的极小值.

极值第二充分条件：设函数 f 在 $O(x_0,\delta_0)$ 内有定义，且 f 在点 x_0 处二阶可导.

$f'(x_0)=0$，则

(1) 若 $f''(x_0)>0$，则 f 在 x_0 处取得极小值.

(2) 若 $f''(x_0)<0$，则 f 在 x_0 处取得极大值.

(3) 若 $f''(x_0)=0$，则无法判断

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2) \quad 当 x\to x_0$$

$$=f(x_0)+\left(\frac{f''(x_0)}{2!}+o(1)\right)(x-x_0)^2, \quad x\to x_0$$

因此，$\exists\, 0<\delta<\delta_0$，使 $x\in O^*(x_0,\delta)$ 时，有

$$\frac{f''(x_0)}{2!}+o(1)>0$$

从而有 $f(x)>f(x_0)$ 于是 x_0 是 f 的极小值点

极值第三判定定理：设 f 在点 x_0 的某个邻域内存在直到 $n-1$ 阶导数

在 x_0 处 n 阶可导，且 $f^{(k)}(x_0)=0$，$k=1,2,\cdots,n-1$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$ （展开到偶数的L-余项） $\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$

(1) 当 n 为偶数，f 在点 x_0 处取到极值，且当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时取极小值.

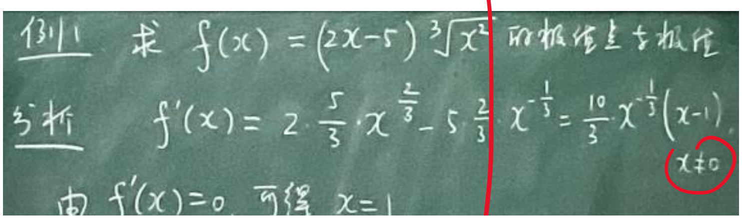
当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时，取极大值 用泰勒公式理解（展开至 n 次）

(2) 当 n 为奇时，f 在点 x_0 时不取极值.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \quad f^{(n)}(x_0)=0, \ \forall n\geq 1$$

※此判定定理为充分条件. 因为导数不一定能一直求到 0.

※ 极值点不一定可导，求极值点要考虑 $\begin{cases} 可导点 & f'(x)=0\ [但 f'(x)=0 不一定为极值点]. \\ 不可导点 & 如: |x| \end{cases}$



0处不可导

$(x\neq 0)$ 0处不可导

由 $f'(x)=0$，可得 $x=1$

因此 f 的可能极值点为 $x=0$，$x=1$

并且由 f 的定义，f 在 0，1 处连续

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-3	↗

由上面的表格可得：0 是 f 的极大值点，极大值为 $f(0)=0$，1 是 f 的极小值点，极小值为 $f(1)=-3$

六、最值问题

问：给定 $[a,b]$ 上的连续函数 f，如何求出 f 的最大值与最小值？

① 可能在端点处取到最值

② 如果在 (a,b) 内某点 x_0 取到最值，则 x_0 一定是 f 的极值点

2.1 f 在 x_0 处可能不可导

2.2 若 f 在 x_0 处可导，必有 $f'(x_0)=0$

因此只需要比较 f 在以下三类点中的取值

就可得到 f 在 $[a,b]$ 上的最值

☆ ① 端点 ② 不可导点 ③ $f'(x)=0$ 的点 → 极值点 + 端点（包括断点）

小性质　设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，

且在 (a,b) 内有唯一的极值点 x_0。

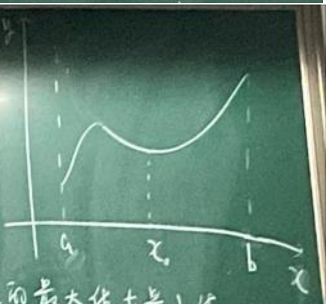
则 当 x_0 为 f 的极小（大）值点时，x_0 是 f 的最小（大）值点

分析　不妨设 x_0 是 f 的极小值点 (*)

由 f 在 $[a,b]$ 上连续，

f 可在 $[a,b]$ 内取得最大值与最小值。

由 x_0 是 f 在 (a,b) 内唯一的极值点，可得 f 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值必在 a，b，及 x_0 处取到。



定理：若 x_0 是 f 在 (a,b) 内唯一的极值点，

可得 f 在 $[a,b]$ 上的最值必在 a，b，x_0 处取到 ×

f 必须要在 $[a,b]$ 上连续（还要考虑断点）。

用反证法. 假设 x_0 不是 f 的最小值点,

则 f 的最小值必在 a 或 b 处取到

不妨设 f 在 a 点处取到最小值, 则 $f(a)<f(x_0)$ (1)

由 f 在 $[a,x_0]$ 上连续, 所以 $\exists\, \xi\in[a,x_0]$,

s.t. f 在 ξ 处取到 $[a,x_0]$ 上的最大值.

由(1), $\xi\neq a$.

若 $\xi=x_0$, 则在 x_0 的某邻域内, f 为常值 严谨!

与条件(*)矛盾! 因此有 $\xi\neq x_0$

此时 $\xi\in(a,x_0)$ 必是 f 的极大值点, 又与条件(*)矛盾!

从而假设错误, x_0 是 f 的最小值点.

七. 画函数图像

※ 特殊点,

1. 确定定义域
2. 确定奇偶性. 周期性
3. 确定特殊的点与坐标轴的交点,
   不连续点, 不可导点, 拐点
4. 确定单调区间, 凸性区间
5. 确定渐近线

5.4.2 麦克劳林多项式

2024年11月8日 星期五　22:46

考虑以下函数的麦克劳林多项式及余项．(都是在0处展开)

1. $f(x)=e^x$

$f^k(x)=e^x,\ \forall k\geq 0$

$\Rightarrow f^k(0)=1,\ \forall k\geq 0$

从而麦克劳林多项式为

$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ 并且 $e^x=T_n(x)+R_n(x)$

其中 P-余项 $R_n=o(x^n)$

其中L-余项 $R_n=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(\theta\in(0,1))$

※对于麦克劳林多项式的L余项可写作

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ \theta\in(0,1)$

2. $f(x)=\sin x$

$f^k(x)=\sin(x+\frac{k}{2}\pi),\ \forall k\geq 0$

$\Rightarrow f^k(0)=\begin{cases}0, & 若 k=2m\ (m\in\mathbb{Z})\\ (-1)^m, & 若 k=2m+1\ (m\in\mathbb{Z})\end{cases}$

从而 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}+R_{2m+2}(x)$

其中 P余项 $R_{2m+2}=o(x^{2m+2})$

L余项 $R_{2m+2}=\frac{f^{2m+3}(\theta x)}{(2m+3)!}x^{2m+3}=\frac{\sin(\theta x+\frac{2m+3}{2}\pi)}{(2m+3)!}x^{2m+3}$

3. $\cos x$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}+R_{2m+1}(x)$

※定理：设 f 在点 x_0 的某邻域内有 $n+1$ 阶导函数存在，则它的 $n+1$ 次泰勒多项式的导函数恰好是 f' 的 n 次泰勒多项式

4. $f(x)=(1+x)^\alpha\quad \alpha\in\mathbb{R}$

$\ldots(1+x)^{\alpha-k}\quad k\geq 1$

4. $f(x)=(1+x)^{\alpha} \quad \alpha\in\mathbb{R}$

$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},\quad k\geq 1$$

$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$$

记 $\binom{\alpha}{k}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!},\ k\geq 1 \quad \binom{\alpha}{0}=1$

从而 $(1+x)^{\alpha}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^{k}+R_n(x)$

$R_n=o(x^n) \quad x\to 0$

$R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\binom{\alpha}{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}\cdot x^{n+1}$

当 $\alpha=-1$ 时 $\binom{\alpha}{k}=(-1)^k,\ k\geq 1 \quad \binom{\alpha}{0}=1$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$$

直接把-x代入

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n)$$

把x^2代入

例：求 $\ln(1+x)$ 的带P-余项的麦克劳林公式（注意 $(\ln(1+x))'=\frac{1}{1+x}$）

$\ln(1+x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$

由定理 $\frac{1}{1+x}$ 的 $(n-1)$ 次麦克劳林多项式为

$\frac{1}{1+x}=a_1+a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}$

故 $(-1)^{k-1}=ka_k \quad \forall 1\leq k\leq n-1$

$\Rightarrow a_k=\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ 又 $a_0=f(0)=\ln 1=0$

将此理解为 $1-x+x^2-x^3\ldots$ 的积分形式

故 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+o(x^n) \quad x\to 0$

例：求 $\arctan x$ 的 $(2n+1)$ 次麦克劳林多项式

例：求 $\arctan x$ 的 $(2n+1)$ 次麦克劳林公式

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \quad x \to 0$$

↑ 看为 $1 - x^2 + x^4 \cdots\cdots$ 的积分形式

例 写出 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的麦克劳林公式，并求 $f^{(98)}(0)$，$f^{(99)}(0)$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{n!} + o(x^{n+1}) \quad (5)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^k}{n!} + o(x^{2n}) \quad (6)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^k}{2^k} x^{2k} + o(x^{2n})$$

由泰勒多项式的唯一性，比较 x^{98} 与 x^{99} 的系数

可得 $\dfrac{f^{(98)}(0)}{98!} = \dfrac{1}{49!} \dfrac{-1}{2^{49}}$ $\qquad \dfrac{f^{(99)}(0)}{99!} = 0$

下说明 (5) → (6) 的合理性。

由 (5) 可得 $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}{x^n} = 0$

从而 $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^k}{k!}}{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n} \overset{令 y = -\frac{x^2}{2}}{=\!=\!=} \lim_{y \to 0} \frac{e^y - \sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{k!}}{y^n} = 0.$

利用麦克劳林多项式求非零处的泰勒多项式

例 求 $f(x) = \ln x$ 在 $x = 2$ 处的带 P- 型余项的泰勒公式。

分析 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n)$ $\quad x \to 0$.

所以 $\ln x = \ln(2 + (x-2)) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x-2}{2}\right)$

$$= \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n + o\left((x-2)^n\right).$$

5. $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$